RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**	
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**	

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+\left(1+i\sqrt{3}\right)z-2+2i\sqrt{3}=0$.

   a) Développer $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$.

   b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit les points Ω et K d'affixes $z_\Omega=1-i\sqrt{3}$ et $z_K=-2$.

   a) Ecrire z_Ω sous forme exponentielle.

   b) Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle ζ de centre O et de rayon 2 et on a placé le point K. Construire le point Ω.

3) Soit φ la similitude indirecte qui, à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=(1-i\sqrt{3})\,\overline{z}-3-i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer le rapport de φ.

   b) Vérifier que Ω est le centre de φ.

   c) Montrer que φ est d'axe (ΩK).

4) Soit le cercle $\zeta'=\varphi(\zeta)$ et le point A d'affixe $z_A=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   La symétrique de la droite (ΩA) par rapport à la droite (ΩK) recoupe ζ' en B.

   a) Construire le cercle ζ'.

   b) Montrer que la droite (ΩB) est l'image de la droite (ΩA) par φ.

   c) En déduire que l'affixe de B est $z_B=(\sqrt{2}-\sqrt{6}-3)-i(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

EFGH est un rectangle direct et IHE est un triangle isocèle en I tel que $(\widehat{\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IE}}) \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi]$.

D et S sont les points du segment [GF] tels que $GS = SD = DF$.

Les parallèles à (EF) menées respectivement de D et S coupent (IE) et (IH) respectivement en O et en Q.

1) Soit f l'antidéplacement tel que $f(F) = G$ et $f(S) = D$.

   a) Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice du segment [FG].

   b) Montrer que $f(O) = Q$.

   c) Montrer que le quadrilatère QODS est un rectangle.

2) La droite (OQ) coupe (HG) en M et coupe (EF) en N.

   a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(M) = O$ et $g(Q) = N$.

   b) Montrer que g est une symétrie glissante d'axe (OQ).

   c) Déterminer le vecteur $\vec{u}$ de g.

3) La droite (QS) coupe (EI) en A et coupe (EH) en B.

   a) Montrer que O est le milieu du segment $[AE]$ puis que Q est le milieu du segment $[AB]$.

   b) Montrer alors que $g(A)=E$.

4) On pose $R = S_{(IE)} o g$.

   a) Caractériser $S_{(IE)} o S_{(OQ)}$.

   b) Montrer que R est une rotation d'angle $-\frac{5\pi}{8}$.

   c) Déterminer $R(M)$ et $R(A)$.

   d) Construire le centre Ω de R.

5) Soit P le symétrique de N par rapport à la droite (IE).

   Montrer que les points Ω , P et E sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

Une urne contient :

- 5 boules blanches numérotées 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2.
- 5 boules noires numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) Une épreuve consiste à tirer au hasard et successivement deux boules de l'urne de la manière suivante :

- Si la première boule tirée est noire et numérotée 1, on la remet dans l'urne et on tire la deuxième boule.
- Sinon on ne remet pas la première boule dans l'urne et on tire la deuxième boule.

On considère les événements suivants :

A « La première boule tirée est noire et numérotée 1 »,

B « La deuxième boule tirée est noire et numérotée 1 ».

a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B/A)$ et $p(B/\bar{A})$.

b) Montrer que $p(B)=\dfrac{49}{225}$.

c) Sachant que la deuxième boule tirée est noire et numérotée 1, calculer la probabilité que la première boule tirée soit aussi noire et numérotée 1.

2) Dans cette question on suppose que l'urne contient :

- $(n+3)$ boules blanches dont trois boules sont numérotées 1 et n boules sont numérotées 2,
- $(m+2)$ boules noires dont deux boules sont numérotées 1 et m boules sont numérotées 2,

où n et m sont deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $m \geq 2$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.

Soit les événements suivants :

E « La boule tirée est noire » et F « La boule tirée est numérotée 1 ».

a) Déterminer $p(E)$ et $p(F)$ en fonction de n et m.

b) Montrer que E et F sont indépendants si et seulement si $2n=3m$.

c) L'urne ne peut contenir qu'au plus 30 boules. Déterminer les valeurs possibles de n et m pour que les évènements E et F soient indépendants.

Exercice 4 (7 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{1-\sqrt{x}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe (C).

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-e}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer que le réel 1 est l'unique solution dans $[0,+\infty[$ de l'équation $f(x)=x$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer (C).

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

On note f^{-1} la fonction réciproque de f et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Tracer la courbe (C') .

5) a) Montrer que pour tout $x\in J$, $f^{-1}(x)=(1-\ln x)^2$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_1^e (1-\ln x)^2\,dx=2e-5$.

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

B/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^n f(t^2)\,dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $F_1(x)=e-(x+1)e^{1-x}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(x)$.

2) Soit $n\geq 1$. Montrer que pour tout $x\geq 0$, $F_{n+1}(x)=-x^{n+1}e^{1-x}+(n+1)F_n(x)$.

3) a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, la fonction F_n est croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 1$, $F_n(x)\leq en!$ pour tout $x\geq 0$.

c) Montrer que pour tout $n\geq 1$, la fonction F_n possède une limite finie L_n quand x tend vers $+\infty$.

4) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $L_n=en!$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

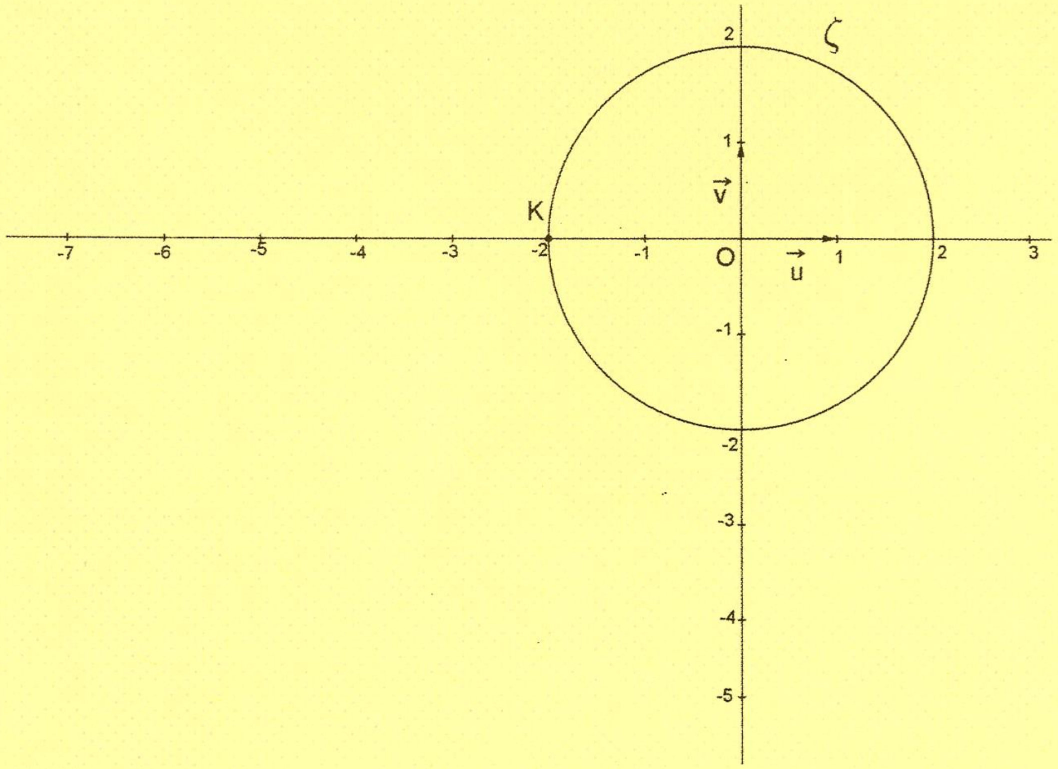

Figure 2