RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages. ***(La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie)***

Exercice N°1 :(5 points)

1) a) Vérifier que $\left(\sqrt{3}+2i\right)^2=-1+4i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+\left(\sqrt{3}-4i\right)z-3\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et E d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{3}+i$, $z_B=3i$ et $z_E=2+i\left(3-\sqrt{3}\right)$.

a) Justifier que le point A appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2.

b) Montrer que $\left(z_B-z_A\right)\left(\overline{z_B-z_E}\right)=-7i$.

c) Montrer que le triangle ABE est isocèle rectangle en B.

d) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a construit le cercle $(\mathcal{C})$.

Placer le point B et construire les points A et E.

3) Soit un point D d'affixe $z_D=x+i$, où x est un réel.

a) Montrer que $\left(z_B-z_D\right)\left(\overline{z_B-z_E}\right)=2x+2\sqrt{3}+i\left(x\sqrt{3}-4\right)$.

b) Pour quelle valeur du réel x, le point D appartient-il à la droite (BE)?

Construire alors ce point D.

Exercice N°2 :(5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système $(S):\begin{cases} n\equiv 10[11] \\ n\equiv 8[13]. \end{cases}$

a) Vérifier que le couple $(-7,6)$ est une solution de l'équation

$(E): 11u+13v=1$, $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Pour un couple (u,v) solution de l'équation (E), on pose $N=88u+130v$.

b) Vérifier que $N=10-22u$.

c) Montrer alors que N est une solution du système (S).

d) Déduire une solution particulière N_0 de (S).

2) Soit k un entier relatif. Montrer que si 11 divise k et 13 divise k alors 143 divise k.

3) a) Soit n un entier relatif vérifiant le système (S).

Montrer que $n-164 \equiv 0[143]$.

b) Déduire qu'un entier relatif n est solution de (S) si et seulement si $n=143p+21$, où $p \in \mathbb{Z}$.

4) Un grand père possède une somme d'argent, en dinars, comprise entre 460 et 730.

- S'il la partage entre ses treize petits-fils à parts égales il lui reste 8 dinars.
- Le jour de l'Aïd, seuls onze parmi eux étaient présents ; après le partage de cette somme à parts égales entre eux, il lui reste 10 dinars.

Quelle est la somme d'argent reçue par chacun des onze petits-fils le jour de l'Aïd.

Exercice N°3 :(4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 5} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n \leq 0$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n+1)^2}{u_n+5}$.

c) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$ dont on précisera le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{n+4} - 1$.

c) Déterminer la plus petite valeur de n tel que $u_n < -0,97$.

Exercice N°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=(\ln x)^2-1$ et on désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

c) En remarquant que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$: $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$, déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Justifier que f est dérivable et que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $(\ln x)$ ont le même signe.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e.

4) a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^2}(1-\ln x)$.

b) Déduire que le point $I(e,0)$ est un point d'inflexion pour la courbe ($\mathscr{C}$).

c) Déterminer une équation de la tangente T à ($\mathscr{C}$) au point I.

5) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe on a placé les points de coordonnées $\left(\frac{1}{e},0\right)$ et $(e,0)$.

Tracer T et ($\mathscr{C}$).

6) a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=x(\ln x-1)^2$ est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$ et $x=e$.

Calculer $\mathcal{A}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session de contrôle (2023)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

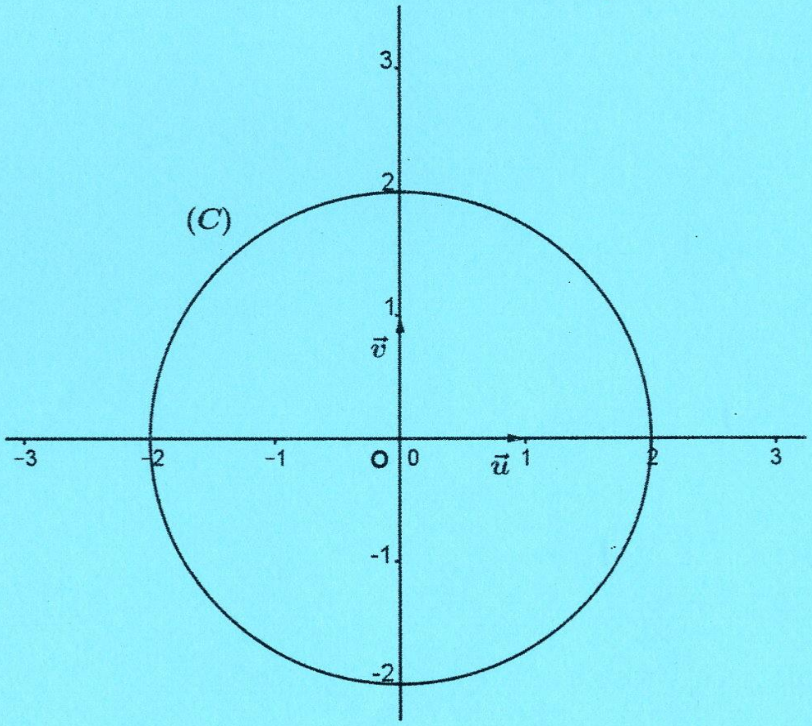

Figure 2