RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**	
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**	

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages. ***(La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie)***

Exercice N°1 :(5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2iz - 4 = 0$.
2) a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z^3 - 8i = (z+2i)(z^2 - 2iz - 4)$.

   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = 8i$.
3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} + i$.

   Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A et on a tracé le cercle (C) de centre O et passant par A.

   a) Montrer que les points B et D appartiennent au cercle (C).

   b) Construire les points B et D.

   c) Montrer que le triangle ABD est équilatéral.
4) La tangente T_1 à (C) en A et la tangente T_2 à (C) en B se coupent au point E.

   a) Justifier que l'affixe du point E s'écrit comme $z_E = x - 2i$, où x est un réel.

   b) Montrer que $(z_E - z_B)\overline{z_B} = x\sqrt{3} - 6 - i(x + 2\sqrt{3})$.

   c) Déduire que $z_E = 2\sqrt{3} - 2i$.
5) a) Prouver que le quadrilatère AEBD est un losange.

   b) Montrer que l'aire du losange AEBD, en unité d'aire, est égale à $6\sqrt{3}$.

Exercice N°2 :(4 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E) : 4x - 3y = 6$.

1) a) Vérifier que le couple $(3,2)$ est une solution de l'équation (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(3,2)$, $B(7,-1)$ et $M(x,y)$, où x et y sont deux entiers relatifs.

   Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux si et seulement si le couple (x,y) est solution de l'équation (E).

3) Soit le point $C\left(3+6\times7^{1445}\ ,\ 2+8\times7^{1445}\right)$.

a) Vérifier que le couple $\left(3+6\times7^{1445}\ ,\ 2+8\times7^{1445}\right)$ est solution de l'équation (E).

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

4)a) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, du triangle ABC. Montrer que $\mathcal{A} = 25\times7^{1445}$.

b) Vérifier que $7^4 \equiv 1[100]$ et déduire que $7^{1445} \equiv 7[100]$.

c) Déterminer alors le chiffre des unités et celui des dizaines de $\mathcal{A}$.

<u>Exercice N°3 :(5 points)</u>

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 23 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 20 & -22 & 2 \\ -17 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que la matrice A est inversible. On notera A^{-1} la matrice inverse de A.

b) Montrer que $A\times B = -18\ I_3$.

c) Déterminer alors la matrice A^{-1}.

2) On considère le système (S) : $\begin{cases} x+z=3 \\ 3x+y+z=23 \\ 23x+2y+z=115 \end{cases}$, où x, y et z sont des réels.

a) En utilisant l'écriture matricielle du système (S), montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 115 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre alors le système (S).

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + bn + c, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}, \end{cases}$

où a, b et c sont trois réels.

On donne : $u_1 = 3$, $u_2 = 23$ et $u_3 = 115$.

a) Montrer que le triplet (a,b,c) est la solution du système (S).

b) Déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 12n - 1$.

4) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 4n + 1$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4.

b) Déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2\times4^n - 4n - 1$.

Exercice N°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln x + e^{1-x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = e \end{cases}$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln x - e^{1-x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{f(x) - e}{x}$.

c) Etudier alors la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ **la courbe (Γ) de la fonction dérivée** f' de la fonction f.

La courbe **(Γ)** coupe l'axe des abscisses uniquement au point $P(1,0)$ et passe par le point $Q(\alpha,2)$, où α un réel.

En utilisant le graphique :

a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

b) Justifier que la tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1 est la seule tangente horizontale à ($\mathscr{C}$).

5) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe **($\mathscr{C}$).**

6) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1 + \ln x - e^{1-x}$.

b) Déduire que $e^{1-\alpha} = \ln(\alpha) - 1$.

c) Soit A l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe **(Γ)**, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A = (\alpha + 1)\ln(\alpha) - 2$.

d) Déterminer alors A' l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe **(Γ)** et le segment $[PQ]$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants
. . . .
. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

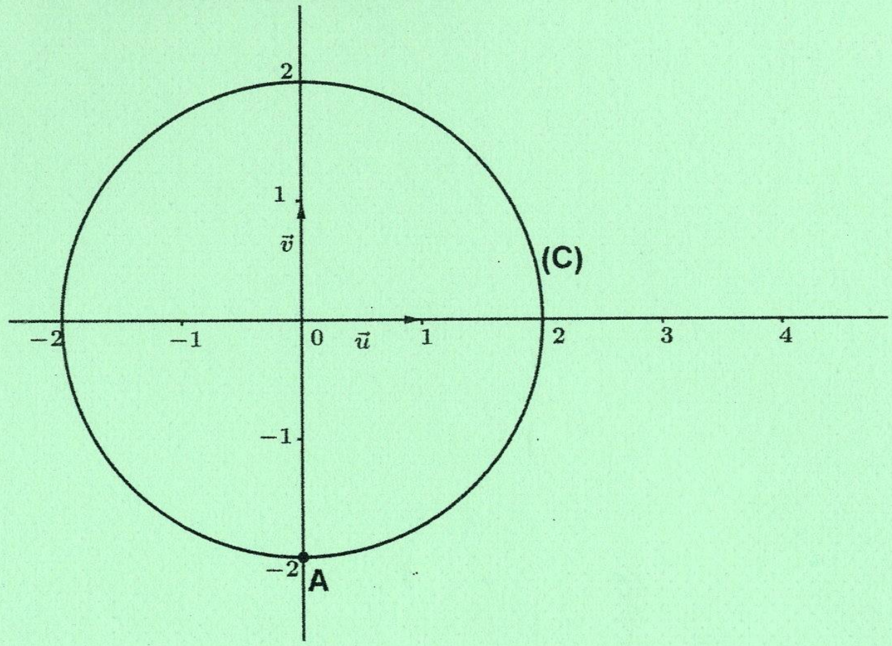

Figure 2