RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 sur 4 à 4 sur 4.
La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points) :

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation
(E) : $z^2 - 2(1+i)z - 4i = 0$.

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $\left[z - (1+i)\right]^2 = \left[\sqrt{3}(1+i)\right]^2$.

b) En déduire les solutions de (E).

2) Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E') : $z^3 - (2+4i)z^2 - 4z - 8 = 0$.

a) Vérifier que $2i$ est une solution de (E').

b) Vérifier que pour tout nombre complexe z :
$z^3 - (2+4i)z^2 - 4z - 8 = (z-2i)\left[z^2 - 2(1+i)z - 4i\right]$.

c) Résoudre alors l'équation (E').

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = (1+\sqrt{3})(1+i)$, $z_C = (1-\sqrt{3})(1+i)$ et $z_D = 2$.

a) Vérifier que $AB = AC = AD = 2\sqrt{2}$. En déduire que les points B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

b) Placer les points A et D, puis construire le cercle $\mathscr{C}$.

c) Montrer que $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et que $\arg(z_C) = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Construire alors les points B et C.

4) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.
Montrer que son aire est $4\sqrt{3}$.

Exercice 2 (5 points) :

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points $A(1,-2,3)$, $B(1,0,5)$ et $C(3,-2,3)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est $2\sqrt{2}$.

c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les points A, B et C est :
$y - z + 5 = 0$.

2) On considère dans l'espace le point $D(1,2,3)$.

a) Calculer la distance du point D au plan $\mathscr{P}$.

b) Déduire le volume v du tétraèdre $ABCD$.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathscr{E}$ tel que : $x^2+y^2+z^2-4x-6z+8=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre $K(2,0,3)$. Donner son rayon R.

b) Montrer que le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère S suivant le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(2,-1,4)$ et de rayon $r=\sqrt{3}$.

4) Pour tout réel m, on considère le point $D_m(1,m,5-m)$ et la sphère S_m de diamètre $[CD_m]$.

a) Montrer que pour tout réel m, D_m appartient à la droite passant par B et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

b) Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BD_m}.\overrightarrow{BC}$, pour tout réel m.

c) En déduire que le point B appartient à S_m.

d) Conclure que, pour tout réel m, le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère S_m suivant le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 3 (4 points) :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}\text{; pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe on a tracé, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative C_h de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=xe^{1-\frac{1}{4}x}$, et la droite $\Delta : y=x$.

1) a) Par une lecture graphique, donner $h\left(\left[0\ ,4\right]\right)$.

b) Sur l'axe des abscisses, placer le point $A_0(u_0,0)$ puis construire les points $A_1(u_1,0)$, $A_2(u_2,0)$ et $A_3(u_3,0)$, en laissant apparents les traits de construction.

c) Que peut-on conjecturer sur la monotonie et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n\leq 4$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_{n-1}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

b) Déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=4$.

Exercice 4 (6 points) :

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - \ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe C_f.

c) Etudier la position relative de C_f et Δ.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par f^{-1} sa fonction réciproque et par $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.

4) Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe on a tracé, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et on a placé le point de Δ d'abscisse e.

Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

5) a) Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \ln x + \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer alors S = $\int_1^e f(x)dx$.

c) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$, l'axe des abscisses et les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de S. En déduire que $\mathscr{A} = 2$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2023)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1 (***Exercice 3***)

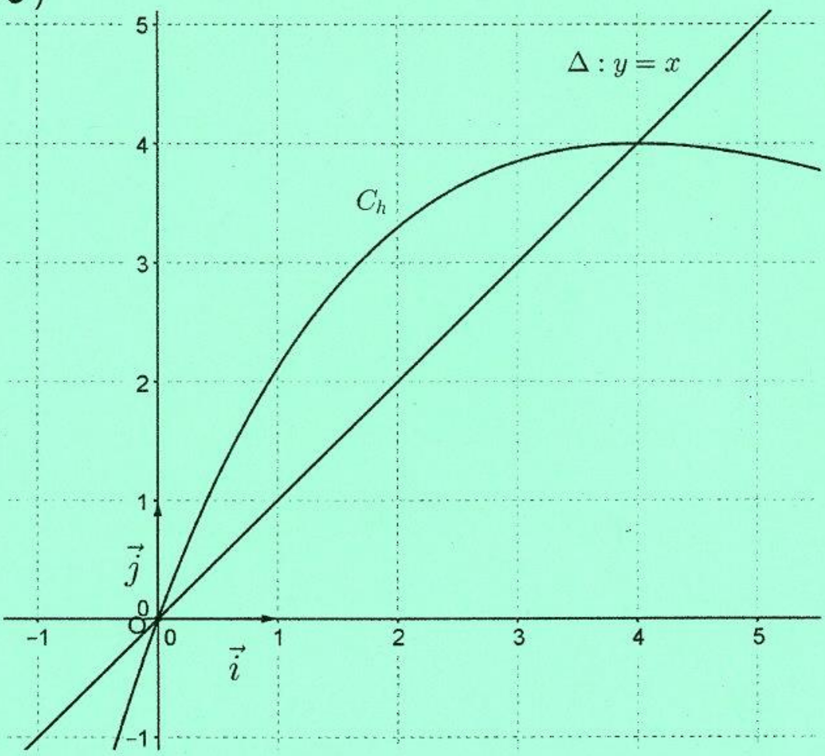

Figure 2 (***Exercice 4***)