RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription ☐☐☐☐☐☐

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4.5 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$.

A tout point M du plan $\mathcal{P}$ d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' de $\mathcal{P}$ d'affixe $z' = \dfrac{iz+2}{z-i}$.

1. Montrer que pour tout $z \neq i$, $(z-i)(z'-i) = 1$.
2. En déduire que $z' \neq i$.

Soit $z \neq i$, M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'.

3. Déterminer l'ensemble des points M tel que $M = M'$.
4. a) Montrer que les points A, M et M' sont alignés si, et seulement si $(z-i)^2$ est réel.

   b) En déduire l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés.
5. Montrer que pour tout point M d'affixe $z \neq i$,

$$AM.\ AM' = 1 \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB}}\right) [2\pi].$$

Dans la figure 1 de l'annexe jointe,

- ζ est le cercle de centre A et de rayon 1.
- K et Q sont les points d'affixes respectives $z_K = i + e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_Q = i + re^{i\frac{\pi}{4}}$, $r > 1$.
- H est le point de ζ tel que le triangle AHQ est rectangle en H et E est le projeté orthogonal de H sur la droite (AK).

6. Soit le point K' d'affixe z'_K.

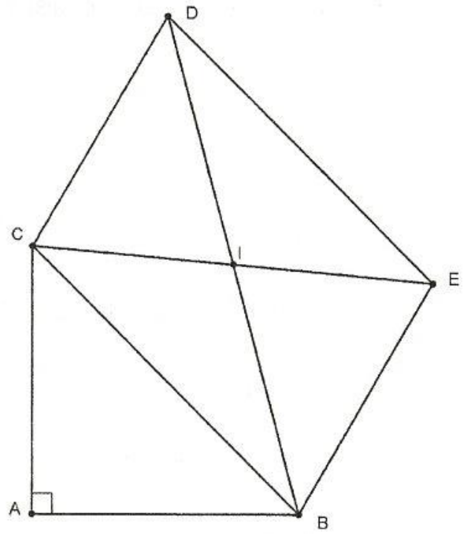
   a) Calculer la distance AK' et donner une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK'}\right)$.

   b) Placer le point K' sur la figure 1.

   c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi-droite $[AK)$ privée du point A.
7. a) Montrer que $AQ \cdot AE = 1$.

   b) Construire alors dans la figure 1 le point Q' d'affixe z'_Q.

Exercice 2 (6 points)



Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre,

- ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
- CBED est un parallélogramme de centre I tel que $CA = CD$ et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en B et B en E.

b) Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) Déterminer le centre O de f.

d) Montrer que OABE est un losange.

On note J le milieu du segment [OD] et on désigne par S la similitude directe qui envoie A en I et O en J.

2. Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Soit $h = S \circ f^{-1}$.

a) Déterminer $h(O)$ et $h(B)$.

b) En déduire que h est l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$.

4. La droite (OE) coupe la droite (CD) en L. Soit Ω le milieu du segment [LD].

a) Montrer que (OD) est parallèle à (AC) puis que (OD) est perpendiculaire à (OL).

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

c) Montrer que $f(\Omega) = L$.

d) En déduire que Ω est le centre de S.

5. Soit $K = S(B)$.

a) Montrer que K est le milieu du segment [DE].

b) Montrer que (KJ) et (OB) se coupent en Ω.

6. La perpendiculaire à (IA) en I coupe (BE) en G.

a) Vérifier que $\cos \widehat{A\Omega I} = \frac{1}{2}$ et montrer que $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega I} = \Omega I^2$.

b) En déduire que Ω appartient à (IG).

Exercice 3 (3 points)

Soit a un entier strictement supérieur à 1 et l'équation

$$(E_a) : (a^2 + a - 1)x - (a+2)y = 1, \text{ où } (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

1. a) Soit un entier $d \geq 2$.

Montrer que si d divise $(a+2)$ alors $a^2 + a - 1 \equiv 1 \pmod{d}$.

b) En déduire que $a^2 + a - 1$ et $(a+2)$ sont premiers entre eux.

2. a) Vérifier que le couple $(1,\ a-1)$ est une solution de (E_a).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_a).

3. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $(a+2)n \equiv 1 \pmod{(a^2 + a - 1)}$.

Exercice 4 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A.

1. a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter graphiquement.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

3. Soit f' la fonction dérivée de f.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \ln x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4. Soit le point $I(e, 0)$ et T la tangente à ξ en I.

a) Montrer qu'une équation de la tangente T est $y = -\frac{1}{\sqrt{e}}(x - e)$.

b) On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f' sur $]0, +\infty[$. Montrer alors que

$f(x) \geq -\frac{1}{\sqrt{e}}(x - e)$ si, et seulement si $x \geq e$.

x	0		e		$+\infty$
f'	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	0

5. Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on donne la courbe de la fonction logarithme népérien dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Placer le point $K(\frac{1}{e},\frac{2}{\sqrt{e}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Tracer dans le même repère T et ξ.

Partie B.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions G_n et H_n définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par

$$G_n(x) = \int_x^e \sqrt{t}\,(1-\ln t)^n\,dt \quad \text{et} \quad H_n(x) = \int_{\ln x}^1 e^{\frac{3}{2}t}\,(1-t)^n\,dt.$$

1. Montrer que les fonctions G_n et H_n sont dérivables sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que $G_n(x) = H_n(x)$, pour tout $x > 0$.

3. Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_1^e \sqrt{t}\,(1-\ln t)^n\,dt$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{e^{\frac{3}{2}}}{n+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4. Soit les suites $(S_k)_{k\geq 1}$ et $(T_k)_{k\geq 1}$ définies par $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{U_n}{n}$ et $T_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $T_k = 1 - \frac{1}{k+1}$.

b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $S_k \leq e^{\frac{3}{2}}$.

c) En déduire que la suite $(S_k)_{k\geq 1}$ est convergente vers un réel a tel que $1 \leq a \leq e^{\frac{3}{2}}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques

Session principale (2023)

Annexe à rendre avec la copie

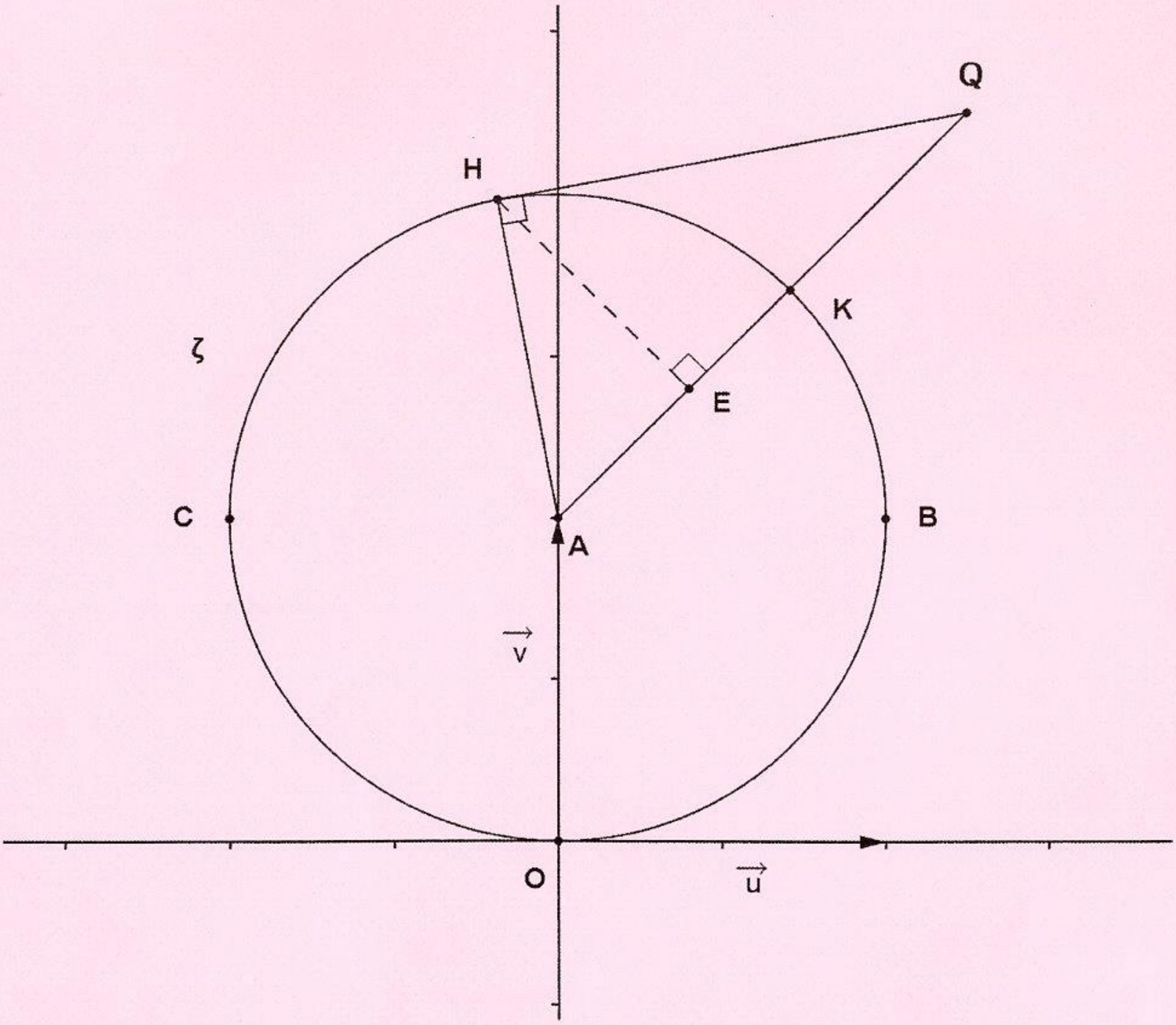


Figure 1

Ne rien écrire ici

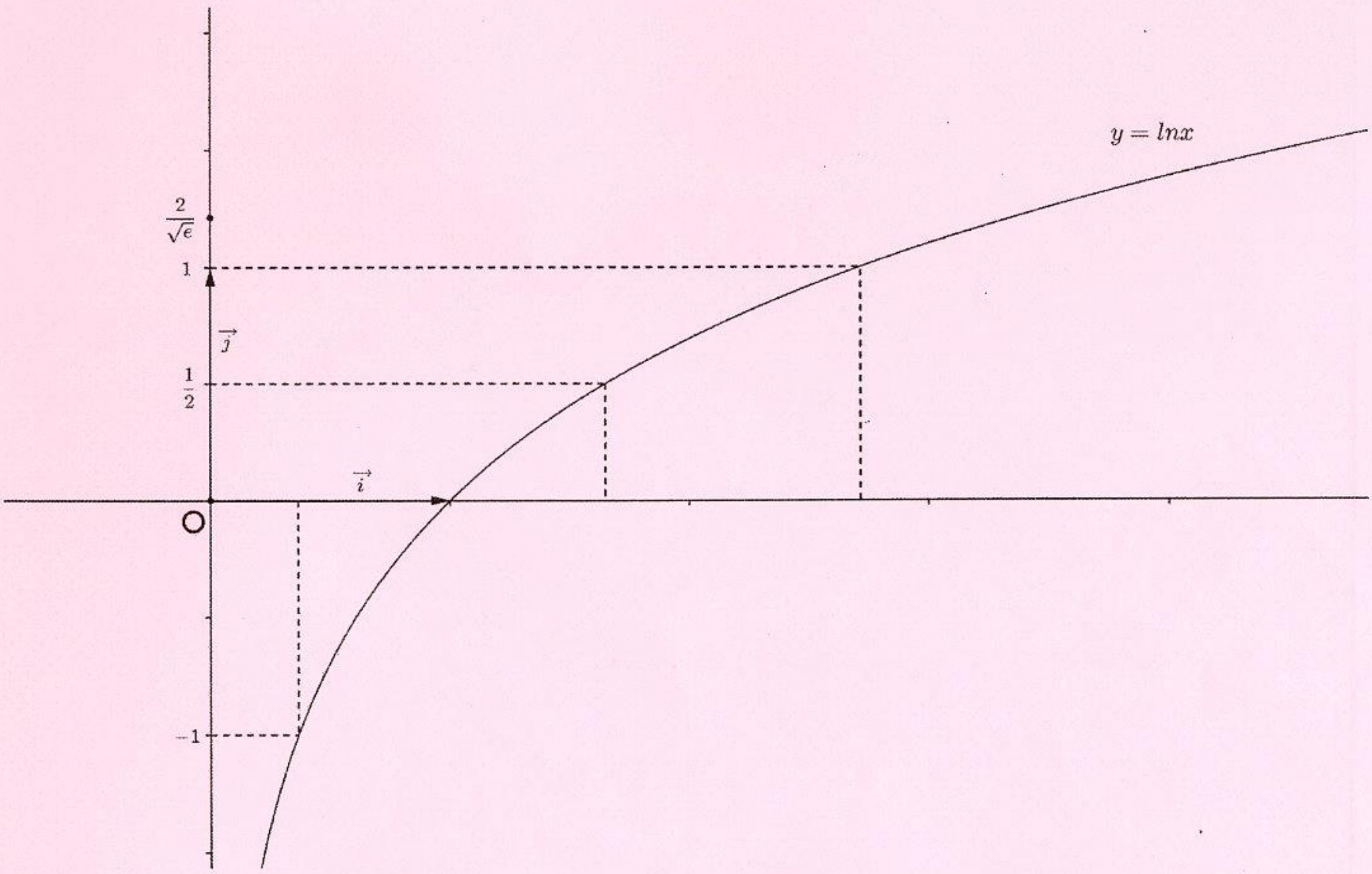


Figure 2