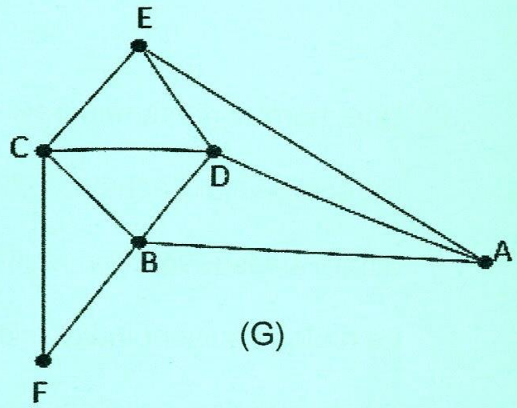
RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Économie et Gestion**
	Durée : **2h**	Coefficient de l'épreuve: **2**

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 (5 points)



La figure ci-contre représente un graphe (G) d'ordre 6.

1) a- Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré						

b- Justifier que le graphe (G) est connexe.

c- Montrer que le graphe (G) admet une chaine eulérienne.

d- Justifier que le graphe (G) n'admet pas de cycle eulérien.

2) a- Montrer que le nombre chromatique γ du graphe (G) vérifie : $3 \leq \gamma \leq 5$.

b- Donner une coloration du graphe (G) avec le minimum de couleurs.

3) Soit $\mathbf{M}$ la matrice associée à (G). On donne :

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 8 & 8 & 4 \\ 9 & 6 & 10 & 10 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 10 & 10 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 9 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a- Donner le nombre de chaines de longueur inférieure ou égale à 3 reliant C à F.

b- Citer un exemple de chaine de longueur 3 reliant C à F.

4) Un groupe de comédiens prépare une pièce de théâtre.
Les sommets du graphe (G) représentent les personnages de cette pièce et chaque arête modélise l'apparition simultanée de deux personnages.

a- Donner le nombre maximal de personnages qui peuvent apparaitre simultanément.

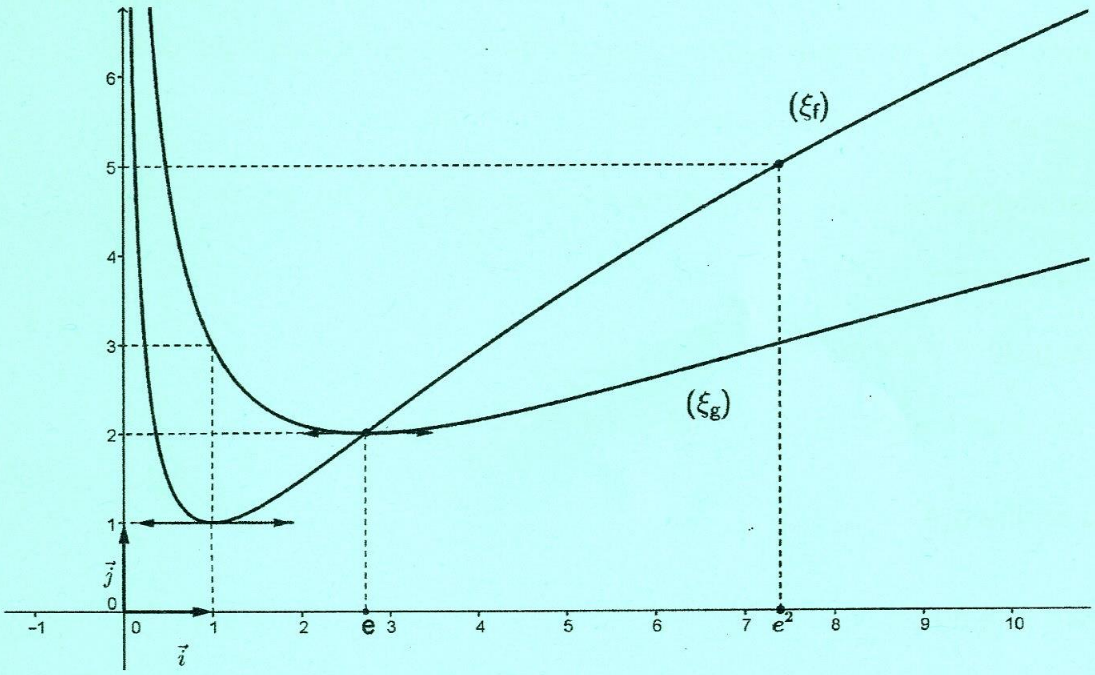
b- On suppose qu'un même comédien peut jouer deux personnages qui n'apparaissent pas simultanément. Donner le nombre minimal de comédiens nécessaire pour réussir cette pièce de théâtre.

Exercice 2 (5,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes (ξ_f) et (ξ_g) ci-dessous sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g définies et dérivables sur $]0,+\infty[$.

- Chacune des courbes (ξ_f) et (ξ_g) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.
- L'axe des ordonnées est une asymptote aux deux courbes.



1) En utilisant les données et le graphique :

a- Donner f(1), f '(1) et f(e).

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c- Résoudre dans l'intervalle $\left[1,e^2\right]$ l'équation : f(x) = g(x).

d- Soit h la restriction de f à l'intervalle I = $\left[1,e^2\right]$. Justifier que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. (**On notera h^{-1} sa fonction réciproque**).

e- Comparer $h^{-1}(1)$ et g(1) puis $h^{-1}(2)$ et g(2) et en déduire que l'équation : $h^{-1}(x)=g(x)$ admet au moins une solution dans $[1,2]$.

2) Dans la suite, on suppose que :

- $g(x)= (\ln(x) - 1)^2 + 2$ pour tout $x \in]0,+\infty[$;
- La fonction F définie, pour tout $x \in]0,+\infty[$, par $F(x) = xg(x)$ est une primitive de f.

a- Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation : g(x) = 6.

b- Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (ξ_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = e^{-1}$ et $x = e^3$.

Exercice 3 (5 points)

On dispose de deux dés cubiques équilibrés D_1 et D_2.

- Les faces de D_1 sont numérotées : 0, 1, 1, 1, 1, 1.
- Les faces de D_2 sont numérotées : 0, 0, 1, 1, 1, 1.

On dispose également d'une urne contenant quatre boules numérotées : 0, 2, 2, 3.

On lance les deux dés une seule fois.

Soit **y** le produit des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés.

- Si **y** est nul, on tire simultanément 2 boules de l'urne.
- Si **y** est non nul, on tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne.

Soient les évènements :

A : « le produit **y** est nul »

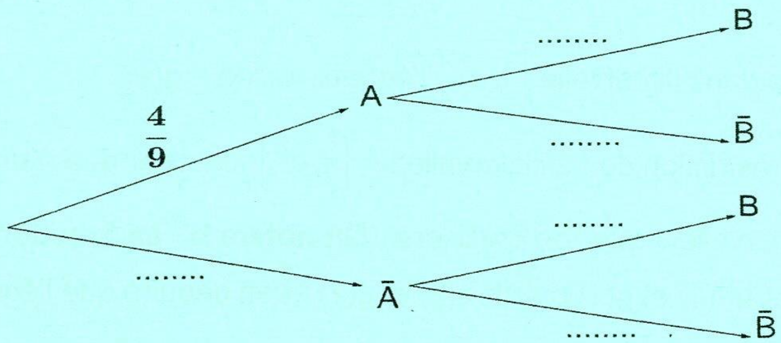
B : « les deux boules tirées portent le numéro 2 ».

1) a- Montrer que $p(A) = \frac{4}{9}$.

b- Montrer que $p(B|A) = \frac{1}{6}$.

c- Montrer que $p(B|\overline{A}) = \frac{1}{4}$.

2) a- Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



b- En déduire p(B)

c- Calculer alors p(A|B).

Exercice 4 (4,5 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 10 & 15\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}10 & 1 & -5\\ -15 & -2 & 9\\ 6 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

1) a- Calculer le déterminant de A et en déduire que A est inversible.

b-Calculer $A\times B$.

2) Une marque d'eau minérale est commercialisée en bouteilles de trois types.

Un commerçant achète 7320 bouteilles d'eau de cette marque au prix d'achat total de 3492 dinars et les revend en réalisant un bénéfice de 2172 dinars.

Le tableau suivant indique les prix d'achat et de vente unitaires et le nombre de bouteilles de chaque type achetés par le commerçant:

Types de bouteilles	Nombre de bouteilles	Prix d'achat unitaire (en dinars)	Prix de vente unitaire (en dinars)
Bouteille de 0,5 ℓ	x	0,3	0,6
Bouteille de 1,5 ℓ	y	0,5	0,8
Bouteille de 2 ℓ	z	0,75	1

a- Montrer que x, y et z vérifient le système (S) : $\begin{cases} x+y+z=7320\\ 6x+10y+15z=69840\\ 6x+8y+10z=56640\end{cases}$

b- Montrer que le système (S) est équivalent à $A\times U=V$ avec $U=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}7320\\ 69840\\ 28320\end{pmatrix}$.

c- Trouver alors x, y et z.