RÉPUBLIQUE TUNISIENNE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

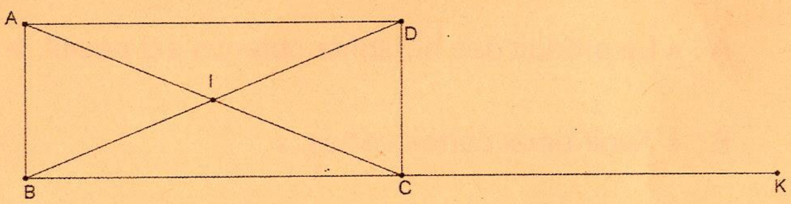
Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un rectangle de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

et K est le symétrique de B par rapport à C.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = B$ et $R(C) = D$.

   b) Montrer que R est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. On désigne par E et F les symétriques respectifs de I par rapport à B et D.



Soit S la similitude directe qui envoie A en E et C en F.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

   b) Montrer que I est le centre de S.

3. Soit $h = R \circ S^{-1}$ où S^{-1} est la similitude réciproque de S.

   Montrer que h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.

4. Soit $S' = S_{(CD)} \circ h$, où $S_{(CD)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (CD).

   a) Montrer que S' est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

   b) Montrer que $S'(E) = K$ et $S'(F) = D$.

   c) Soit G le symétrique de I par rapport à C et J le milieu de $[DK]$.

   Déterminer $S'(I)$ et $S'(G)$.

5. Soit H le milieu du segment $[CD]$.

   a) Déterminer $h(J)$ et en déduire que J est le milieu de $[FG]$.

   b) Montrer que le centre Ω de S' est le centre de gravité du triangle IFG.

   c) Déterminer l'axe de S'.

Exercice 2 (4 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont marquées -2 ; -2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 et d'une boite contenant deux cartes vertes et trois cartes rouges. Toutes les cartes sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à lancer le dé deux fois de suite. On s'intéresse au produit des deux nombres obtenus.

- Si le produit des deux nombres obtenus est positif, on tire simultanément trois cartes de la boite.
- Si le produit des deux nombres obtenus est négatif, on tire simultanément deux cartes de la boite.

1. On considère les évènements :

   A : « Le produit des nombres obtenus est positif. »

   B : « Avoir deux cartes vertes. »

   a) Montrer $P(A) = \frac{5}{9}$.

   b) Montrer que $P(B) = \frac{19}{90}$.

2. On a obtenu deux cartes vertes, calculer la probabilité qu'on a obtenu un produit positif.
3. Un magasin offre une réduction à ses clients moyennant le jeu précédent. Le client bénéficie d'une réduction de 20 dinars sur chaque carte verte tirée et aucune réduction sur les cartes rouges. Soit X la variable aléatoire égale à la réduction totale en dinars obtenu par un client.

   a) Montrer que $P(X = 0) = \frac{17}{90}$.

   b) Déterminer la loi de probabilité de X.

   c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=e^{-\frac{1}{x+1}} \text{ ; si } x > -1, \\ f(-1)=0. \end{cases}$

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en -1.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{f(x)}{x+1} = 0$. Interpréter le résultat.
3. a) Vérifier que pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} f(x)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.
4. a) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α qui appartient à $[0.4,\ 0.6]$.
5. Dans l'annexe jointe, on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe ζ et les droites d'équations respectives $y=1$ et $y=x$.

   Représenter la courbe ζ' de la fonction f^{-1} dans le même repère.
6. Soit $\lambda > 0$, on note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ et les droites d'équations respectives $y=0$, $x=0$ et $x=\lambda$.

   a) Montrer que pour tout réel $u \geq 0$, $1-u \leq e^{-u} \leq 1-u+\dfrac{u^2}{2}$.

   b) Montrer que $\lambda - \ln(\lambda+1) \leq A(\lambda) \leq \lambda - \ln(\lambda+1) + \dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)}$.

   c) En déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{A(\lambda)}{\lambda}$.
7. Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{(x+1)^{n+2}}\,dx$.

   a) Calculer u_0.

   b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\alpha}{n+1}$.

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   d) En utilisant une intégration par parties, montrer que

   $u_n = \dfrac{\alpha}{(\alpha+1)^n} - \dfrac{1}{e} + n u_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.

   e) Montrer alors que la suite $(nu_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 4 (4 points)

Soit a un entier.

1. Copier et compléter le tableau ci-dessous.

Reste modulo 7 de a	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de a^2							

Soit n un entier positif ou nul. On pose $P_n(x) = x^2 + 2(n+1)^3\,x + 1$.

2. Dans cette question, on suppose que $n \equiv -1 \pmod{7}$.

   Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $P_n(x) \equiv 0 \pmod{7}$.

3. Dans cette question, on suppose que 7 ne divise pas $n+1$.

   a) Montrer que $(n+1)^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

   b) Vérifier que $P_n(x) \equiv \left(x + (n+1)^3\right)^2 \pmod{7}$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $P_n(x) \equiv 0 \pmod{7}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $P_{2023}(x) \equiv 0 \pmod{7}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2023)
Annexe à rendre avec la copie