

<b>RÉPUBLIQUE TUNISIENNE</b>  <b>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION</b>	<b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT</b>	Session principale	<b>2024</b>
	Épreuve : <b>Mathématiques</b>	Section : <b>Mathématiques</b>	
	Durée : <b>4h</b>	Coefficient de l'épreuve : <b>4</b>	

N° d'inscription

**Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.  
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.**

### Exercice 1 (4.5 points)

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $2\sqrt{3}z^2 - (7 - i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - 2i = 0$ .

- 1) a) Vérifier que  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  est une solution de (E).  
b) Déterminer l'autre solution sous forme exponentielle.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe,  $\zeta$  est le cercle de centre O et de rayon 1 et P est un point de  $\zeta$  d'affixe  $z_P = e^{i\theta}$ , où  $\theta$  est un réel de  $] -\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ .

- a) Construire le point Q d'affixe  $z_Q = e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$ .
- b) La tangente à  $\zeta$  en Q coupe la droite (OP) au point M d'affixe  $z_M$ .

Montrer que  $z_M = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\theta}$ .

- c) Construire le point N d'affixe  $z_N = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .
- d) Vérifier que les points M et N sont distincts.

3) a) Montrer que  $z_M - z_N = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$ .

b) Montrer que  $z_M - z_Q = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$ .

c) Pour quelle valeur de  $\theta$ , le triangle MNQ est-il rectangle en M ?

## Exercice 2 ( 5 points )

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle ABC est isocèle en A tel que

$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ , J est le milieu du segment [AC], I est le point tel que  $\overline{AC} = \sqrt{2} \overline{AI}$

et K est le point tel que le triangle AJK est isocèle en A et  $(\overline{AJ}, \overline{AK}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ .

Soit R la rotation de centre A et d'angle  $\frac{5\pi}{6}$ , h l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

et S la similitude directe telle que  $S(B) = I$  et  $S(I) = K$ .

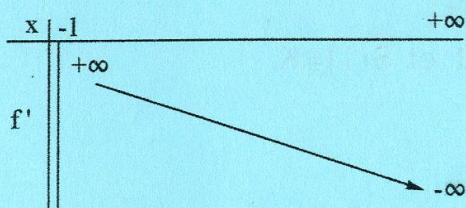
- 1) Justifier que  $h \circ R = R \circ h$ .
- 2)
  - a) Déterminer  $h \circ R(B)$ .
  - b) Vérifier que  $h(I) = J$ .
  - c) Montrer que  $S = h \circ R$ .
  - d) En déduire une mesure de l'angle orienté  $(\overline{IB}, \overline{IK})$ .
- 3) Soit  $E = S(K)$ .
  - a) Montrer que  $(\overline{KI}, \overline{KE}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$ .
  - b) Déterminer  $S \circ S \circ S(B)$ . En déduire que les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.
  - c) Construire le point E.
- 4) Soit g la similitude indirecte telle que  $g(B) = I$  et  $g(I) = K$ . On note  $\Omega$  le centre de g.
  - a) Déterminer le rapport de g.
  - b) Déterminer  $g \circ g(B)$ . En déduire que  $\Omega$  est le symétrique de B par rapport à K.
- 5) Soit F le milieu du segment  $[I \Omega]$ .
  - a) Montrer que  $F = g(K)$ .
  - b) Justifier que  $(\overline{KI}, \overline{KF}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .
  - c) En déduire que le triangle KEF est équilatéral.

### Exercice 3 (7 points)

A/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty [$  par  $f(x) = x - (x-1)\ln(x+1)$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.
- b) Montrer que la droite d'équation  $x = -1$  est une asymptote à  $(C)$ .
- 2) Montrer que pour tout  $x \in ] -1, +\infty [$ ,  $f'(x) = \frac{2}{x+1} - \ln(x+1)$ .
- 3) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction  $f'$ .



- a) Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $] -1, +\infty [$  une unique solution  $\alpha$  telle que  $1.3 < \alpha < 1.4$ .
- b) En déduire le signe de  $f'(x)$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (On précisera  $f(0)$  et  $f(1)$ ).
- 4) Tracer la courbe  $(C)$ , (on prendra  $\alpha = 1.35$ ).
- 5) a) Montrer que pour tout  $x > -1$ ,  $\int_0^x (t-1)\ln(t+1)dt = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) + \frac{1}{4}(6x - x^2)$ .
- b) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $y = 0$ .

B/ Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose  $a_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$ .

- 1) a) Justifier que pour tout  $x \in ] -1, 1 [$ ,  $f'(x) \geq 1 - \ln 2$ .
- b) En déduire que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}$ .
- 2) a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\int_0^{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} (f(x))^n dx \leq \left(1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}\right)^n$ .
- b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $0 \leq a_n \leq \left(1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .
- c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}\right) = -\infty$ .
- d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

### Exercice 4 (3.5 points)

1) Soit dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E) :  $5u - 53v = 24$ .

a) Vérifier que  $(26, 2)$  est une solution de (E).

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E).

2) Soit  $x \in \mathbb{Z}$ .

a) Déterminer les restes modulo 5 de  $x^2 - x$ .

b) Montrer que  $(x - 27)^2 \equiv x^2 - x - 13 \pmod{53}$ .

3) On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système (S) : 
$$\begin{cases} x^2 - x \equiv 1 \pmod{5} \\ x^2 - x \equiv 13 \pmod{53}. \end{cases}$$

a) Montrer que  $x$  est une solution de (S) si et seulement si, il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tels que

$$\begin{cases} x = 3 + 5u \\ x = 27 + 53v. \end{cases}$$

b) Déterminer les solutions du système (S).

4) Déterminer dans  $\mathbb{Z}$ , les solutions de l'équation  $x^2 - x - 66 \equiv 0 \pmod{265}$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Signatures des surveillants  
.....  
.....

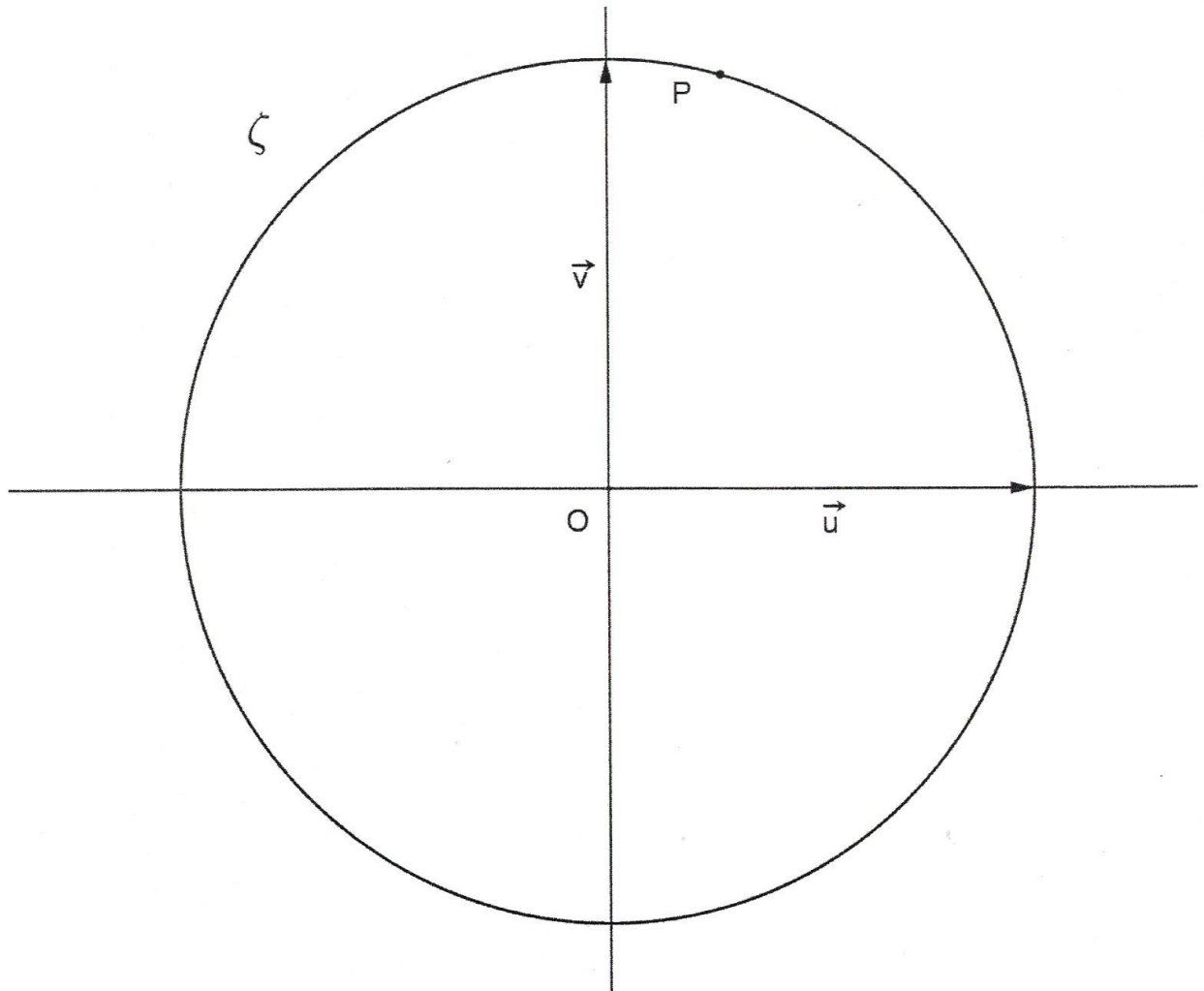
Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques**  
**Session principale (2024)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

**Figure 1**



Ne rien écrire ici

Figure 2

