Programme du concours d'accès au cycle agrégatif
Mathématiques, session 2019

Algèbre

Eléments de la théorie des ensembles.
Opérations sur les ensembles. Applications ensemblistes, images directes, images réciproques ; injections, surjections, bijections.

Polynômes et fractions rationnelles. Généralités sur les polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes. Racines d'un polynôme, formule de Taylor pour un polynôme. Division euclidienne dans R[X], C[X] ; factorisation. Généralités sur les fractions rationnelles. Décomposition en éléments simples dans R(X), C(X). Applications.

Espaces vectoriels. Espaces vectoriels : définitions, propriétés et exemples.
Sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires.
Systèmes générateurs, systèmes libres, bases (dimension d'un espace vectoriel).

Applications linéaires. Définitions, exemples. Opérations sur les applications linéaires. Rang et noyau d'une application linéaire, théorème du rang. Représentation matricielle. Systèmes linéaires, méthodes de résolution par élimination. Calcul matriciel et calcul des déterminants.

Retour sur les espaces vectoriels. Systèmes générateurs, bases, théorème de la base incomplète. Espaces supplémentaires, somme directe.
Rang d'une application linéaire, matrices, formules de changement de bases.
Déterminants, calculs pratiques.

Réductions des endomorphismes. Position du problème, exemples et propriétés. Vecteurs propres et valeurs propres. Polynôme caractéristique, diagonalisation, trigonalisation. Théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal. Exponentielle de matrice (cas des matrices diagonale et de la forme (D+N). Applications aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Espaces euclidiens. Formes bilinéaires : définitions, exemples et propriétés.
Matrice d'une forme bilinéaire, formule de changement de bases.
Produit scalaire. Norme, distance et angles. Bases orthonormées, orthogonalité et endomorphismes d'un espace euclidien. Le groupe orthogonal. Etude précise en dimension 2 et 3.

Formes bilinéaires et formes quadratiques. Formes quadratiques, exemples et propriétés. Forme polaire d'une forme quadratique. Base orthogonale, rang, méthode de Gauss, signature. Applications.

Groupes. Généralités sur les groupes, exemples (groupe symétrique, groupe diédral, ..). Sous groupes. Ordre d'un élément. Groupe quotient. Groupes cycliques finis. Générateurs. Le groupe **(Z/nZ,+).** Théorème de Lagrange. Indicatrice d'Euler.

Arithmétique dans Z .. Anneau **Z.** Division euclidienne. Idéaux de **Z ..** Divisibilité, PGCD, PPCM. Théorème de Bezout. Congruences. Anneau **Z/nZ.** Groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau **Z/nZ.** Nombres premiers. Théorèmes classiques (Fermat, Euler, Wilson, théorème chinois).

Analyse

Analyse à une variable réelle

Suites de nombres réels. Description de IR, borne supérieure et borne inférieure. Généralités sur les suites de nombres réels. Suites convergentes et critères de convergence. Suites adjacentes. Suites de Cauchy.

Fonctions numériques continues. Limite d'une fonction numérique. Continuité en un point et sur un intervalle. Continuité uniforme. Propriétés des fonctions continues.

Fonctions numériques dérivables. Dérivabilité en un point, définition et propriétés. Dérivabilité sur un intervalle, théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
Fonctions convexes. Formules de Taylor, Développements limités, Exemples et applications.

Fonctions usuelles
Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

Intégrale de Riemann. Calcul des primitives. Intégration par parties. Formule de changement des variables. Applications.

Equations différentielles. Equations différentielles du premier ordre, exemples et applications.

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, méthodes de résolution, exemples et applications.

Intégrales généralisées. Calcul pratique de quelques intégrales généralisées. Exemples fondamentaux. Convergence absolue. Cas des fonctions positives (comparaison et équivalence). Règle d'Abel.

Séries numériques. Critères de convergence des séries numériques. Comparaison d'une série numérique et d'une intégrale généralisée. Séries à termes positifs (comparaison et équivalence). Comparaison avec la série de Riemann. Règle de Cauchy. Critère de D'Alembert. Règle de Duhamel Séries alternées. Règle d'Abel. Produit de séries numériques

Suites et séries de fonctions. Convergences simple et uniforme des suites de fonctions. Continuité des limites uniformes des suites de fonctions. Dérivabilité des limites des suites de fonctions. Intégration des limites des suites de fonctions. Applications aux séries de fonctions. Convergence normale des séries de fonctions. Règle d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions.

Séries de Fourier. Séries trigonométriques. Coefficients de Fourier. Théorème de Dirichlet. Théorème de Parseval

Intégrales dépendant d'un paramètre. Intégrales définies dépendant d'un paramètre. Continuité, dérivabilité et intégration. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. Convergence uniforme et normale. Continuité, dérivabilité et intégration des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. Règle d'Abel.

Analyse à une variable complexe

Séries entières. Rayon de convergence. Somme et produit de séries entières. Dérivation et intégration des séries entières. Développement en séries entières des fonctions usuelles.

Fonctions holomorphes. Définitions. Egalités de Cauchy-Riemann. Développement en série d'une fonction holomorphe sur une couronne. Théorème de D'Alembert et théorème de Louiville. Théorème de Cauchy.

Théorème de Résidus. Points singuliers isolés. Notion et calcul des résidus. Théorème des résidus. Applications au calcul intégral.

Topologie et calcul différentiel

Eléments de topologie d'un espace vectoriel normé. Ouvert, fermé, adhérence, intérieur, limite et valeur d'adhérence d'une suite. Continuité, homéomorphisme. Espace de Banach. Théorème du point fixe. Applications linéaires et multilinéaires continues. Connexité. Compacité, théorème de Riesz.

Fonctions de plusieurs variables réelles. Dérivées partielles, fonctions de classe Cl, matrice jacobienne, différentiabilité, dérivées partielles d'ordre deux, fonctions de classe C2, formule de Taylor d'ordre deux, extremum local.

Applications différentiables sur un espace de Banach. Différentielles d'applications particulières. Règles de calcul. Applications produit.
Théorème des accroissements finis et applications. Différentielles d'ordre supérieur : différentielle seconde, théorème de Schwarz. Règles de calcul. Formules de Taylor. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Applications.
Structure locale des applications différentiables: théorème du rang, lemme de Morse. Extrema des fonctions réelles.

Intégration

Tribus, fonctions mesurables, approximation par fonctions étagées. Mesures. Intégrale d'une fonction mesurable par rapport à une mesure.
Théorèmes de convergence (théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominé, lemme de Fattou), intégrales à paramètre. Espaces Lp et dualité. Théorèmes d'unicité et applications. Tribus et mesures produit, théorème de Fubini.
Formule de changement de variables pour la mesure de Lebesgue.

Probabilités

Espaces de probabilités. Tribus d'événements. Probabilité. Probabilité conditionnelle. Variables aléatoires. Loi d'une variable aléatoire. Exemples de lois de probabilités. Indépendance. Indépendance des événements. Variables aléatoires indépendantes. Convolution des lois.
Espérance. Espérances conditionnelles. Fonctions caractéristiques et vecteurs gaussiens.
Convergence des suites de variables aléatoires. Convergence presque sûre.

Convergence en probabilité. Convergence en loi. Lois des grands nombres et Théorème de la limite centrale.

Equations différentielles.

Théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, dépendance des conditions initiales et des paramètres. Intégrales premières.
Equations différentielles linéaires. Résolvante. Wronskien. Méthode de variation des constantes. Equations à coefficients constants.